MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşița, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A X-A
PROFIL M1

(2p)	**1.** a) cu inegalitatea mediilor : $a > 2\sqrt{\log_2 8} > 3$
(2p)	Pe de altă parte : $\log_2 5 < \frac{5}{2}$ (deoarece $5^2 < 2^5$) şi $\log_5 8 < \frac{3}{2}$ (...) Aşadar $[a] = 3$
(3p)	b) se ajunge la $\log_3(x-1) = \log_5(1+x) \overset{not}{=} t$, de unde $5^t - 3^t = 2$ sau $1 = 2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t$; se arată că $t = 1$ este unica soluție, deci $x = 4$.
(2p)	**2.** a) orice exemplu corect , justificat (de ex. : $a = 1, b = i, c = -i$)
(2p)	b) banal (imaginile celor doi *frați nenuli* sunt simetrice față de origine)
(3p)	c) presupunem că $\|a\| \ge \|b\| \ge \|c\| \ge 2$; din $\|abc\| = \|a+b+c\| \le \|a\| + \|b\| + \|c\| \le 3\|a\|$, deducem : $\|b\|\cdot\|c\| \le 3 \Rightarrow \|c\|^2 \le 3 \Rightarrow \|c\| \le \sqrt{3} < 2$
(2p)	**3.** a) dacă *f* este strict monotonă, se ştie că $f \circ f$ este strict crescătoare Avem însă că $g(x) = \{x\}$ nu este strict crescătoare ($\frac{1}{2} < 1$, dar $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 = g(1)$
(2p)	b) $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow [x] = [y]$; cum însă această egalitate este satisfăcută şi pentru , de exemplu, $x = \frac{1}{2} \ne y = \frac{2}{3}$, *f* nu poate fi injectivă
(3p)	c) se arată că, de exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{2}$ este bijectivă şi satisface egalitatea din enunț
(3p)	**4.** membrul stâng se scrie $E = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} \overset{not}{=} 3^S$
(2p)	$S = 3^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}$
(2p)	Finalizare : $m = 3$.

BAREM DE NOTARE ŞI CORECTARE

Notă:
Orice altă soluție corectă se notează corespunzător.